Title	Metrisationノ一問題 (II)
Author(s)	角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 77 p.9-p.15
Issue Date	1936-02-07
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74261
rights	
Note	

338. *Metrisation* ノ問題 (II)

角谷静夫 (阪大)

定理 II ノ証明

定理 II ヲ証明スルニハ次ノ定理 III ヲ証明スレバ十分デアル。

定理 III. R_1 ガ metrisch, im kleinen kompakt デ zusammenhängend デアッテ、R_2 ガソノ部分空間デ R_1 ニ於テ開デテ居レバ R_2 ノ任意ノ Metrik ハ R_1 全体ヘ fort setzen スルコトガ出来ル。

先ヅ定理 III カラ定理 II ガ得ラレルコトヲ証明シヨウ.

R_1 ノ Metrik ガ ρ_1, R_2 ノ Metrik ガ ρ_2 ニヨッテ與ヘラレタトセヨ。

R_1 ヲ zusammenhängend ナ部分 ("Komponent") ニ分ッ。

$$R_1 = \sum_{\alpha} R_{1,\alpha}$$

$R_{1,\alpha}$ ハ何レモ R_1 ニ於イテ同時ニ閉ヂテ開イタ集合デアル。且ツ $\alpha \neq \beta$ ナラバ $R_{1,\alpha} \cdot R_{1,\beta} = 0$ 。 次ニ

$$R_{2,\alpha} = R_2 \cdot R_{1,\alpha}$$

$R_{2,\alpha}$ ハ空集合デアルカモ知レナイ。$R_{2,\alpha} \neq 0$ ナル α ヲ α'[4], $R_{2,\alpha} = 0$ ナル α'' ニテ表ハスコトニスレバ

$$R_2 = \sum_{\alpha'} R_{2,\alpha'}$$

デアル。更ニ

$$R_1' = \sum_{\alpha'} R_{1,\alpha'}, \qquad R_1'' = \sum_{\alpha''} R_{1,\alpha''}$$

トオク。

$$R_1 = R_1' + R_1''$$

デアル。 定理 III ニヨリ $R_{2,\alpha'}$ ニテ定義サレタ $\rho_{2,\alpha'}(x,y) = \rho_2(x,y)$ ハ $R_{1,\alpha'}$ 全体へ *fortsetzen* スルコトが出來ル。コレヲ $\rho^*_{2,\alpha'}(x,y)$ トセヨ。

R_1' ニ於ケル *Metrik* $\rho_2^{*\prime}(x,y)$ ヲ次ノ如ク定義スル。

1°. $x, y \in R_{1,\alpha'}$ ナラバ $\rho_2^{*\prime}(x,y) = \rho^*_{2,\alpha'}(x,y)$

2° $x \in R_{1,\alpha'}$, $y \in R_{1,\beta'}$ ナラバ

$$\rho_2^{*\prime}(x,y) = \underset{\substack{z_{\alpha'} \in R_{2,\alpha'} \\ z_{\beta'} \in R_{2,\beta'}}}{\mathrm{U.G}} \left\{ \rho^*_{2,\alpha}(x, z_{\alpha'}) + \rho_2(z_{\alpha'}, z_{\beta'}) \right.$$

---

4) β' モ $R_{2,\beta'} \neq 0$ ナルトキニ用ヒル。

$$+\rho^*_{2,\beta'}(z_{\beta'},y)\}$$

コノ定義ハ次ノ場合ニハ次ノ如ク簡単ナ形ニナル。

(a) $x\in R_{2,\alpha'}$, $y\in R_{2,\beta'}$ ナラバ $\rho_2^{*\prime}(x,y)=\rho_2(x,y)$

(b) $x\in R_{2,\alpha'}$, $y\in R_{1,\beta'}-R_{2,\beta'}$ ナラバ

$$\rho_2^{*\prime}(x,y)=\underset{z_{\beta'}\in R_{2,\beta'}}{\mathrm{u.G}}\{\rho_2(x,z_{\beta'})+\rho^*_{2,\beta'}(z_{\beta'},y)\}$$

(c) $x\in R_{1,\alpha'}-R_{2,\alpha'}$, $y\in R_{2,\beta'}$ ナルトキモ同様.

此ノ如ク定義サレタ $\rho_2^{*\prime}(x,y)$ ガ R_2 ニ於テ $\rho_2(x,y)$ ト一致スルコトハ(1°)及ビ(2°)(a)ヨリ明カデアルカラ, $\rho_2^{*\prime}(x,y)$ ガ R_1' 全体ヘノ ρ_2 ノ Fortsetzung デアルコトヲ示スニハ

(I) $\rho_2^{*\prime}(x,y)$ ガ距離ノ三公準ヲ満足スルコト。

(II) R_1' デ考ヘテ $\rho_2^{*\prime}(x,y)$ ト $\rho_1(x,y)$ ガ topologisch äquivalent ナルコト。

ガ云ヘレバヨイ。コレラハ容易デアルカラ省略スル。

次ニ $z'\in R_1'$, $z''\in R_1''$ ヲ夫々任意ニエランデ $\rho_2^*(x,y)$ ヲ

1°. $x,y\in R_1'$ ナルトキハ $\rho_2^*(x,y)=\rho_2^{*\prime}(x,y)$

2°. $x,y\in R_1''$ ナルトキハ $\rho_2^*(x,y)=\rho_1(x,y)$

3°. $x\in R_1'$, $y\in R_1''$ ナルトキハ

$$\rho_2^*(x,y)=\rho_2^*(y,x)=\rho_2^{*\prime}(x,z')+1+\rho_1(z'',y)$$

トオク。(従ッテ $\rho_2^*(z',z'')=1$) 斯ノ如ク定義サレタ ρ_2^* ガ定理III ニ於テ求メテヰルモノデアルコトハ容易ニワ

カル。（イツモノ様ニ條件(I),(II)ヲシラベレバヨイ）

定理IIIヲ証明スルタメニ次ノ定理IVヲ証明スル。

定理IV. *metrisch, im kleinen kompakt, zusammenhängend* ナ空間 R ハ適當ニ *Metrik* ヲツケカヘレバ「有界集合ハスベテ R ニ於イテ *kompakt* デアル。（*Bolzano-Weierstrass* ノ定理ガ成立スル）空間」トナル。

<u>定理IVノ証明</u>　*Alexandroff* ノ定理（紙上談話會75号,327参照）ニヨリ R ハ *separabel* デアルカラ R ニ一点 ξ ヲツケ足シテ $R+\xi$ ガ *kompakt, separabel* シタガッテ *metrisch* ニスルコトガ出來ル。

コノ *Metrik* ヲ ρ トセヨ。a ヲ R ノ任意ノ一定点トシ R ノ新シイ *Metrik* $\bar{\rho}$ ヲ

$$\bar{\rho}(x,y)=\left|\frac{\rho(a,x)}{\rho(\xi,x)}-\frac{\rho(a,y)}{\rho(\xi,y)}\right|+\rho(x,y)$$

ニヨッテ定義スル。

$\bar{\rho}(x,y)$ ガ距離ノ三公準ヲ満足スルコトハ容易ニワカル。

又、$\bar{\rho}(x,y)\geqq\rho(x,y)$ デアルカラ $\bar{\rho}(x_0,y_n)\to 0$ ナルトキ $\rho(x_0,y_n)\to 0$

逆ニ $\rho(x_0,y_n)\to 0$ ナルトキ

$$\left|\frac{\rho(a,x_0)}{\rho(\xi,x_0)}-\frac{\rho(a,y_n)}{\rho(\xi,y_n)}\right|\to 0$$

デアルカラ $\bar{\rho}$ ト ρ ハ R ニテ *topologisch äquivalent* デアル。

$\bar{\rho}$ が求メル Metrik デアルコトハ $y_n \to \xi$ ナルトキ

（$\rho(\xi, y_n)\to 0$ ナルトキ）

$$\bar{\rho}(x_0, y_n)\to\infty$$

ヨリワカル。

<u>定理 IV ヲ用ヒテ定理 III ヲ証明スルコト</u>： R_1, R_2 ノ Metrik が夫々 ρ_1, ρ_2 ニヨリ與ヘラレタトセヨ。定理 IV ニヨリ R_1 ノ Metrik ρ_1 ハ $\bar{S}(a,n)$ がスベテ *kompakt* ニナル如ク定メラレテヰルト考ヘルコトが出来ル。（a ハ R_2 ニ屬スル一定点トス。）

$$R_2\cdot\bar{S}(a,n)=R_2^n \quad n=1,2,3,\text{--------}$$

トオク。R_2^n ハ $\bar{S}(a,n)$ ニテ閉デテヰルカラ，ソレ自身 *kompakt, abgeschlossen* デアル。故ニ R_2^1 ニテ定義サレタ $\rho_2^1=\rho_2$ ハ $\bar{S}(a,1)$ 全体ヘ *fortsetzen* スルコトが出来ル。

コレヲ ρ_2^{1*} ニテ表ハス，一般ニ $\bar{S}(a,n)$ ニテ ρ_2^{n*} が定義サレ，R_2^n ニテ $\rho_2^{n*}=\rho_2$ デアルトキ $\bar{S}(a,n)+R_2^{n+1}$ ニ於テ $\bar{\rho}_2^{n*}$ ヲ次ノ如ク定義スル。

1°. $x, y\in\bar{S}(a,n)$ ナルトキ $\bar{\rho}_2^{n*}=\rho_2^{n*}$

2°. $x, y\in R_2^{n+1}-R_2^n$ ナルトキ $\bar{\rho}_2^{n*}=\rho_2$

3°. $x \in \overline{S}(a,n)$, $y \in R_2^{n+1} - R_2^n$

ナルトキ

$\overline{\rho}_2^{n*}(y,x) = \overline{\rho}_2^{n*}(x,y)$

$= \underset{z \in R_2^n}{\mathrm{u.G.}} \{ \rho_2^{n*}(x,z)$

$+ \rho_2(z,y) \}$.

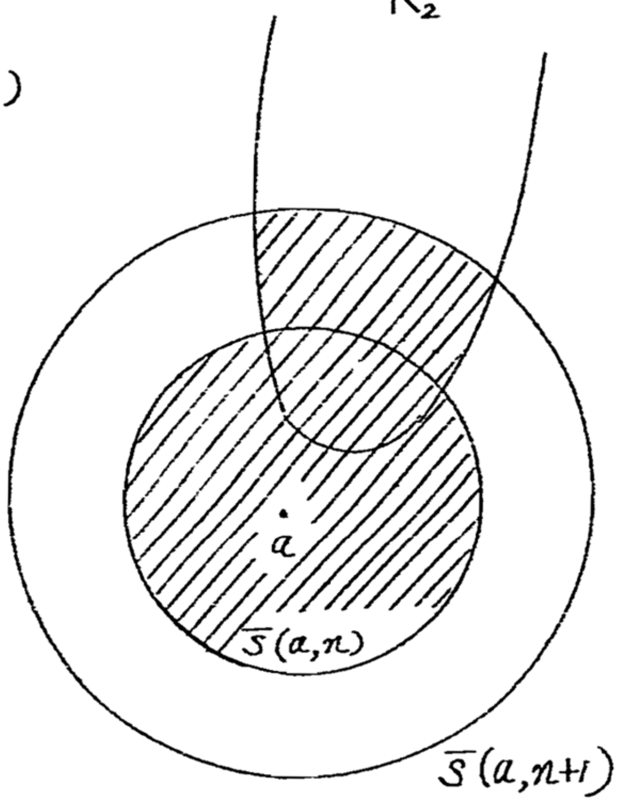
(故ニ $x \in R_2^n$,

$y \in R_2^{n+1} - R_2^n$ ナ

ルトキハ

$\overline{\rho}_2^{n*}(x,y) = \overline{\rho}_2^{n*}(y,x)$

$= \rho_2(x,y)$)



此ノ如ク定義サレタ $\overline{\rho}_2^{n*}(x,y)$ ガ距離ノ三公準ヲ満タシ且ツ R_2^{n+1} ニテハ ρ_2 ト一致シ $\overline{S}(a,n)$ ニテハ ρ_2^{n*} ト一致スルコトハ容易ニワカル。シカモ $\overline{\rho}_2^{n*}$ ハ R_1 ニテ ρ_1 ト *topologisch äquivalent* デアル。

次ニ $\overline{S}(a,n) + R_2^n$ ハ $\overline{S}(a,n+1)$ ニ於テ *kompakt*, *abgeschlossen* デアルカラ定理 I ニヨリ $\overline{S}(a,n) + R_2^n$ ニテ定義サレタ $\overline{\rho}_2^{n*}(x,y)$ ハ $\overline{S}(a,n+1)$ 全体ヘ *fortsetzen* シテコレガ ρ_1 ト *topologisch äquivalent* ニナルヤウニスルコトが出来ル。

$\rho_2^*(x,y) = \lim_{n\to\infty} \rho_2^{n*}(x,y)$ ハ $x, y \in R_1$ ナル任意ノ x, y ニ對シテ存在シテ，コレハ容易ニ示サレル如ク所要ノ

$P_2(x,y)$ ノ Fortsetzung デアル。

——(証明終)——